9. Séries entières

Rayon de convergence

1 ♥ ★☆☆

Que dire du rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ dans chacun des cas suivants ?

1. (a_n) est nulle à partir d'un certain rang.
2. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$.
4. $(|a_n|)$ diverge vers $+\infty$.

2 ♥ ★☆☆

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$.
2. $\sum \mathrm{ch}(n)x^n$.
3. $\sum \cos(n)x^n$.
4. $\sum \dfrac{n^n}{n!}x^n$.
5. $\sum \dfrac{\mathrm{sh}(n)}{(\mathrm{ch}(n))^2}x^{2n}$.
6. $\sum \left(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2\right)x^n$.
7. $\sum x^{n^2}$.
8. $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$.
9. $\sum \arctan(n^\alpha)x^n$.

3 ♥ ★☆☆

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}.$$

On s'intéresse à la série entière $\sum b_n z^n$, dont on note R_b le rayon de convergence.

1. Comparer $|a_n|$ et $|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que
$$R_b \geqslant \max(1, R_a).$$
2. Montrer que $R_b = \max(1, R_a)$.
On pourra distinguer les cas $R_b = 1$, et $R_b > 1$.

4 ♥ ★★☆

1. Montrer que pour toute série $\sum u_n$ à termes positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} q$,
   - si $q < 1$, alors $\sum u_n$ converge,
   - si $q > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que
$$\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$
Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$.

5 ♥ ★★☆ Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries entières

$$\sum a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum n^\alpha a_n z^n$$

ont même rayon de convergence.

6 ♥ ★★☆ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum a_n z^{kn}$, pour $k \in \mathbb{N}^\star$.
2. $\sum a_n^2 z^n$.
3. $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$.

7 ★★☆ Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \pi^{\sqrt{n(n+1)}} x^{2n}.$$

8 ★★☆ *Coefficients périodiques.*

Soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite p-périodique non nulle.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
2. Montrer que la somme peut s'écrire comme quotient de deux fonctions polynomiales.

Etude de la somme

9 ♥ ★☆☆ On considère la fonction

$$f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) z^n$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?

10 ♥ ★☆☆ On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$.
2. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa continuité.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

11 ★☆☆ On considère la fonction réelle définie par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^n.$$

1. Préciser le domaine de définition de f et justifier que f est continue sur son domaine de définition.
2. Étudier la dérivabilité de f et déterminer une équation différentielle dont f est solution.

12 ★★☆ On considère la fonction réelle définie par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer l'intervalle de définition I de f, et étudier la dérivabilité de f.
2. Déterminer la limite de f en 1^-.
3. Pour $x \in I$, écrire $(1-x)f'(x)$ sous la forme d'une série, et en déduire le signe de f' sur I.

Calcul de sommes de séries entières

13 ♥ ★☆☆ On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.
3. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$.

14 ♥ ★☆☆ Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes, calculer leur somme sur l'intervalle de convergence, et étudier la convergence aux bornes de l'intervalle s'il y a lieu.

1. $\sum_{n\geqslant 0} (2+(-1)^n)x^n$.
2. $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} (n+3)^2 x^n$.
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n}}{2n-1}$.
5. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{ch}(n)x^n$.
6. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$.
7. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

15 ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. Expliciter sa somme

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

3. Étudier la convergence normale et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$.

16 ★★☆ Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}.$$

17 ★★☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Étudier la monotonie de la suite (a_n), et montrer que (a_n) converge vers une limite qu'on précisera.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer une relation entre a_{n+2} et a_n. En déduire un équivalent de a_n.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$f_n : x \mapsto \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$$

Déterminer la nature de la série $\sum f_n(x)$ en fonction de x et α.

4. Expliciter la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles.

18 ♥ ★☆☆ *Identité binomiale.*
Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n.$$

19 ★★☆ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.
2. On note S la somme de la série, et D son domaine de définition.
   a. Étudier la convergence normale, puis uniforme de la série sur D.
   b. La fonction S est-elle continue sur D ?

Développement en série entière

20 ♥ ★☆☆ Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. $f : x \mapsto \ln(x^2+4x+3)$.
2. $f : x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.
3. $f : x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)$.

21 ♥ ★☆☆ Soient $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leqslant K n!$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

22 ♥ ★★☆ On considère l'équation différentielle

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer toutes les solutions de (E) développables en séries entière sur un voisinage de 0. Expliciter la somme des séries entières obtenues.
2. (**5/2**) Les solutions de (E) sur $]0,1[$ sont-elles toutes les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

23 ★★☆ *Fonctions absolument monotones.*

Soient $R > 0$ et une fonction $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,r[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Montrer la convergence simple sur $]-R,R[$ de la série de fonctions

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

24 ♥ ★★☆ *DSE par équation différentielle.*

On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par

$$f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Justifier l'existence d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont f est solution, et en déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

25 ★★☆ Développer en série entière au voisinage de 0 la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

On pourra commencer par trouver une équation différentielle du second ordre dont f est solution.