8. Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un segment

1 ♥ ★☆☆ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+7}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

2 ★☆☆ Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

3 ♥ ★☆☆ Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+3k}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

4 ♥ ★☆☆ *Intégrales de Wallis.*

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. *a.* Etudier la monotonie puis la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$I_{n+2} = (n+1)\,(I_n - I_{n+2})\,.$$

   c. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \quad\text{et}\quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Intégrales généralisées

5 ♥ ★☆☆ Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction des éventuels paramètres (réels) :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\arcsin t}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^\alpha}{t^\beta(1-t)^\gamma}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t^2+1}-t)^\alpha\,\mathrm{d}t$

6 ★★☆ Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leur valeur.

1. ☆☆☆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$.
2. ★☆☆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{t-\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

7 ♥ ★★☆ En fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$, étudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

8 ★★☆ Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Pour quels complexes z la fonction $f_n : t\mapsto t^n e^{zt}$ est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?
2. Pour ces valeurs de z et pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer

   $$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{zt}\,\mathrm{d}t.$$

9 ★★☆

1. Après avoir montré sa convergence, calculer l'intégrale

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que pour tout $a>0$,

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln a}{a}.$$

10 ♥ ★☆☆ *Primitives bornées.*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge. Montrer que toute primitive de f est bornée.

11 ♥ ★☆☆ Soit $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur l'intervalle I.

1. Montrer que si f est de signe constant sur I, alors
$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que la réciproque est vraie.

12 ♥ ★☆☆ Soit $f \in \mathscr{C}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur $[1,+\infty[$. Montrer la convergence de
$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

13 ★★☆ *Intégrales de Fresnel.*
. Montrer la convergence des intégrales :
$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

14 ♥ ★★☆ Soit f une fonction continue, intégrable, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

15 ★★☆ Montrer que la fonction
$$\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$
définie sur $\mathbb{R}_+^\star\setminus\{1\}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

16 ♥ ★★☆ *Transformée de Laplace.*
Soit $f \in \mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer :
$$\forall s>0,\quad \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

17 ★★☆ *Inégalité de Hardy.*
Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que pour tout $A\in[0,+\infty[$,
$$\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que g^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$, et
$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Montrer que fg est intégrable sur $]0,+\infty[$, et
$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ♥ ★☆☆ Soit $x\in\mathbb{R}_+^\star$.
1. Déterminer un équivalent en 0 de $\displaystyle\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
On pourra commencer par une intégration par parties.

19 ★★☆ *Équivalent du reste de l'intégrale de Gauss.*
Déterminer une équivalent lorsque $x\to+\infty$ de
$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
On pourra commencer par une intégration par parties.

20 ★★☆ On considère la fonction
$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$.
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Convergence dominée

21 ♥ ☆☆☆ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que I_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

22 ♥ ★☆☆ Soit $\alpha>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{1+t^\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$
1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n\to+\infty$.

23 ★☆☆ Soit $f : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, justifier l'existence de I_n.
2. On suppose $f(0)\neq0$. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n\to+\infty$.
On rappelle l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

24 ♥ ★★☆ Dans chacun des cas suivants, justifier l'existence de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.