8. Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un segment

1 ♥ ★☆☆ Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+7}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\,\mathrm{d}x$.

2 ★☆☆ Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

3 ♥ ★☆☆ Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+3k}$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

1. $\frac{2\ln 2}{3}$.
2. $\sqrt{3}-1$.
3. $\frac{\ln 2}{2}$.

4 ♥ ★☆☆ *Intégrales de Wallis.*

On considère la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. *a.* Etudier la monotonie puis la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

   c. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

   $$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad\text{et}\quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Intégrales généralisées

5 ♥ ★☆☆ Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction des éventuels paramètres (réels) :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\arcsin t}$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t)^\alpha}{t^\beta(1-t)^\gamma}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t^2+1}-t)^\alpha\,\mathrm{d}t$

On appelle f la fonction qu'on intègre.

On rappelle (et on utilise par la suite) le fait que les notions d'intégrabilité et d'intégrale convergente sont les mêmes lorsque les fonctions sont positives (ou négatives) au voisinage du point que l'on considère.

L'idée est de donner un intervalle le plus grand possible où f est continue : si on a continuité de f jusqu'à une borne incluse de cette intervalle, f est intégrable au voisinage de cette borne. Au voisinage des éventuelles bornes ouvertes, on fait des études locales et on utilise le théorème de comparaison combiné avec les résultats de convergence/divergence des intégrales de Riemann.

1. f est continue sur $]0,1]$. Au voisinage de 0, $f(t)\sim\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc d'après le théorème de comparaison à une intégrale de Riemann, $\int_0^1 f$ converge.
2. f est continue sur $]0,+\infty[$.
   - Au voisinage de 0, $f(t)\sim\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc f est intégrable.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f(t)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable.

   Ainsi, $\int_0^{+\infty} f$ converge.
3. f est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, on a $f(t)\sim\frac{1}{t}$ donc d'après le théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} f$ diverge.
4. f est continue sur $[0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (croissances comparées) donc d'après le théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} f$ converge.
5. f est continue sur $]0,+\infty[$. Au voisinage de 0, $f(t)\sim 1$ donc f est prolongeable par continuité donc intégrable. Au voisinage de $+\infty$, $f(t)\sim\frac{e^t/2}{te^t/2}=\frac{1}{t}$, donc f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
   Conclusion : f n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
   N.B. Il n'est pas utile de faire l'étude au voisinage de 0 *pour conclure.*
6. f est continue sur $]0,1]$. Au voisinage de 0, $\arcsin t\sim t$ (Taylor-Young) donc $f(t)\sim\frac{1}{t}$, donc $\int_0^1 f$ diverge.

7. f est continue sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, $f(t) \sim \frac{1}{t^\beta}$ donc f est intégrable si et seulement si $\beta < 1$. Au voisinage de 1, $f(t) \sim \frac{2^\alpha}{(1-t)^\gamma}$ donc f est intégrable si et seulement si $\gamma < 1$.
   Ainsi, f est intégrable si et seulement si $\beta < 1$ et $\gamma < 1$.
8. f est continue sur $[0,+\infty[$. Au voisinage de $+\infty$,

$$\sqrt{t^2+1} = t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{1}{2}} = t\left(1+\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = t+\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc

$$f(t) = \left(\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)^\alpha = \frac{1}{2^\alpha t^\alpha}(1+o(1))^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha t^\alpha}$$

qui est intégrable si et seulement si $\alpha > 1$, donc $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6 ★★☆ Montrer que les intégrales suivantes convergent et déterminer leur valeur.

1. ☆☆☆ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$.
2. ★☆☆ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-e^t}\,dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$.
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,dx$.

1. On a pour tout $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = [\arcsin u]_0^x = \arcsin x$$

   Comme $\arcsin x \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi}{2}$, l'intégrale converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.
2. On posera $u = e^t$.
3. Comme la fonction $t \mapsto e^t+1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, nous pouvons effectuer le changement de variable $x = \sqrt{e^t+1}$. Ceci équivaut à $t = \ln(x^2-1)$. On est alors ramené à l'intégrale

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x(x^2-1)} = 2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$$

   Cette dernière intégrale converge par comparaison à une intégrale de Riemann. On en déduit que l'intégrale recherchée converge, et vaut

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = 2\ln(1+\sqrt{2}).$$

4. On a recours au changement de variable $t = \tan x$. Comme tan est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$, ce changement de variable est licite. On est alors ramené à l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x \tan^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

Or on a $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}-1$.

5. On remarque d'abord que l'intégrale converge bien : $f(x) \to -1$ quand $x \to 0$, et f est intégrable en 1 car ln l'est en 0.
   On procède par IPP sur un intervalle $[0,a]$ avec $a < 1$. On a

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{x}\ln(1-x^2)\right]_0^a - 2\int_0^a \frac{1}{1-x^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{a}\ln(1-a^2) - \int_0^a \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx \\ &= \ln(1-a)\left(1-\frac{1}{a}\right) - \ln(1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right) \\ &\xrightarrow[a\to 1]{} -2\ln 2, \end{aligned}$$

   car $(a-1)\ln(1-a) \to 0$ lorsque $a \to 1$. L'intégrale vaut donc $-2\ln 2$.

   Pour éviter de travailler avec une somme d'intégrales divergentes, on peut choisir une primitive qui s'annule en 1 dans l'IPP : $x \mapsto -\frac{1}{x}+1$.

7 ♥ ★★☆ En fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^\alpha}\,dt$

1. f est continue sur $]0,1[$. Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \ln t = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$ donc f est intégrable. Pour l'étude au voisinage de 1, posons $u = 1-t$: on a

$$f(t) = \frac{\ln(1-u)}{u^\alpha} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-1}{u^{\alpha-1}}$$

   On en déduit qu'au voisinage de 1, f est intégrable si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ ou encore $\alpha < 2$.
   Bilan : $\int_0^1 f$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.
2. f est continue sur $]0,1]$.
   - Si $\alpha \geqslant 1$, au voisinage de 0

$$f(t) = \frac{1}{t^\alpha}\underbrace{\ln t}_{\xrightarrow[t\to 0]{} -\infty}$$

     donc $\frac{1}{t^\alpha} = o(f(t))$ et donc d'après le théorème de comparaison, $\int_0^1 f$ diverge.
   - Si $\alpha < 1$: soit $\beta \in]\alpha,1[$, au voisinage de 0

$$f(t) = \frac{\ln t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\beta}\underbrace{t^{\beta-\alpha}\ln t}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0} = o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$$

     D'après le théorème de comparaison, $\int_0^1 f$ converge.

8 ★★☆ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quels complexes z la fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{zt}$ est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

2. Pour ces valeurs de z et pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{zt}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et pour tout $t \geqslant 0$, $|f_n(t)| = t^n \exp(\mathfrak{Re}\, zt)$.

- si $\mathfrak{Re}\, z < 0$, les croissances comparées garantissent que $f_n(t) = o(\frac{1}{t^2})$ donc par le théorème de comparaison, f_n est intégrable.
- si $\mathfrak{Re}\, z = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(t)| = t^n$ donc f_n n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- si $\mathfrak{Re}\, z > 0$, $|f_n(t)| \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$ donc f_n n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Bilan f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathfrak{Re}\, z < 0$.

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}\, z < 0$, $n \geqslant 1$ et $T > 0$. On intègre par parties sur l'intervalle $[0,T]$:

$$\int_0^T t^n e^{zt}\,\mathrm{d}t = -\int_0^T nt^{n-1}\frac{e^{zt}}{z}\,\mathrm{d}t + \left[t^n \frac{e^{zt}}{z}\right]_0^T$$

$$\underbrace{\int_0^T t^n e^{zt}\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[T\to+\infty]{} I_n} = -\frac{n}{z}\underbrace{\int_0^T t^{n-1}e^{zt}\,\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[T\to+\infty]{} I_{n-1}} + \underbrace{T^n\frac{e^{zT}}{z}}_{\xrightarrow[T\to+\infty]{} 0}$$

En passant à la limite $T \to +\infty$ on obtient

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_n = -\frac{n}{z} I_{n-1}$$

On calcule $I_0 = -\frac{1}{z}$ et par une simple récurrence, $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{-k}{z}\right) I_0 = \frac{(-1)^n n!}{z^n} I_0 = \frac{(-1)^{n+1} n!}{z^{n+1}}$$

9 ★★☆

1. Après avoir montré sa convergence, calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\frac{\ln a}{a}.$$

10 ♥ ★☆☆ *Primitives bornées.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge. Montrer que toute primitive de f est bornée.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (qui existe car f est continue). Comme $\int_0^{+\infty} f$ converge, on a

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, F admet une limite finie en $+\infty$. De même, comme $\int_{-\infty}^0 f$ converge, F admet une limite en $-\infty$.
Par conséquent, F est bornée sur un voisinage $[b,+\infty[$ de $+\infty$, et sur un voisinage $]-\infty,a]$ de $-\infty$. Par le théorème des bornes atteintes, f est continue donc bornée sur le segment $[a,b]$. Par conséquent, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

11 ♥ ★☆☆ Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur l'intervalle I.

1. Montrer que si f est de signe constant sur I, alors

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la réciproque est vraie.

1. Immédiat en distinguant les deux cas $f \geqslant 0$ et $f \leqslant 0$.
2. Si $\int_I f = \int_I |f|$ alors la fonction $|f| - f$ est positive, continue et d'intégrale nulle, donc nulle.

   Si $-\int_I f = \int_I |f|$ alors la fonction $|f| + f$ est positive, continue et d'intégrale nulle, donc nulle.

   Dans les deux cas, f est de signe constant.

   Notons que le résultat serait faux en supposant f seulement continue par morceaux car dans ce cas, on pourrait changer arbitrairement la valeur de f en un point sans changer la valeur de l'intégrale.

12 ♥ ★☆☆ Soit $f \in \mathscr{C}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ d'intégrale convergente sur $[1,+\infty[$. Montrer la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Notons $F : x \mapsto \int_1^x f$ une primitive de f. Comme f est d'intégrale convergente, F a une limite finie en $+\infty$ donc est bornée sur un voisinage $[a,+\infty[$ de $+\infty$, où $a \geqslant 1$. Comme F est continue, elle est bornée sur le segment $[1,a]$ donc F est bornée.
Soit $x \geqslant 1$, on intègre par parties sur le segment $[1,x]$:

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x F(t)\left(\frac{-1}{t^2}\right)\mathrm{d}t + \left[\frac{1}{t}F(t)\right]_1^x.$$

Comme F est bornée, $\frac{F(t)}{t^2} = O(\frac{1}{t^2})$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le théorème de comparaison. Comme F est bornée, le crochet admet également une limite lorsque $x \to +\infty$.
On en déduit que $\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite lorsque $x \to +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

13 ★★☆ *Intégrales de Fresnel.*

. Montrer la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

On peut procéder par IPP : pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos(t^2)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \frac{1}{2t}\,2t\cos(t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\sin(t^2)}{2t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{\sin(t^2)}{2t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On a $\frac{\sin(b^2)}{b} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\sin(a^2)}{a} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
On en déduit donc que l'intégrale de Fresnel converge.

N.B. : on obtient un nouvel exemple de fonction dont l'intégrale converge en $+\infty$, mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

14 ♥ ★★☆ Soit f une fonction continue, intégrable, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Indication. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Par intégrabilité de f, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f - \int_0^x f \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, par décroissance de f,

$$\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} f(2x)\,\mathrm{d}t = xf(2x).$$

Ainsi, on a $xf(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $2xf(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne

$$yf(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

15 ★★☆ Montrer que la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^\star\setminus\{1\}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

16 ♥ ★★☆ *Transformée de Laplace.*

Soit $f \in \mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer :

$$\forall s > 0,\quad \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

17 ★★☆ *Inégalité de Hardy.*

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que pour tout $A \in [0,+\infty[$,
$$\int_0^A g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^A f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que g^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$, et
$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. Montrer que fg est intégrable sur $]0,+\infty[$, et
$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

18 ♥ ★☆☆ Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

1. Déterminer un équivalent en 0 de $\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On pourra commencer par une intégration par parties.

1. On a
$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$$
Comme on sait que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, on a par intégration des relations de comparaison
$$\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{y\to 0}{\sim} \int_0^y t^{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{y^x}{x}.$$
2. On a par intégration par parties
$$\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} (x-1)t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{+\infty} (x-1)t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = y^{x-1}\mathrm{e}^{-y}.$$
Or on a
$$t^{x-2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right).$$
Comme l'intégrale $\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est convergente, on a par intégration des relations de comparaison,
$$\int_y^{+\infty} t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{=} o\left(\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$$
ce qui entraîne
$$\int_y^{+\infty} t^{x-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{y\to+\infty}{=} y^{x-1}\mathrm{e}^{-y}.$$

19 ★★☆ *Équivalent du reste de l'intégrale de Gauss.*

Déterminer une équivalent lorsque $x \to +\infty$ de

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra commencer par une intégration par parties.

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

20 ★★☆ On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et que
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star,\quad \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[x,\infty[$, on en déduit que l'intégrale définissant $f(x)$ existe.
Par ailleurs, comme intégrale fonction d'une de ses bornes, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et $f'(x) = -\frac{\sin x}{x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
2. On a
$$\frac{\sin t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}.$$
Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est divergente, on a par intégration des relations de comparaison
$$\int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x.$$
Ainsi, $f(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.
3. Par la question précédente, et comme ln est intégrable en 0, on déduit par règle d'équivalence des fonctions positives que f est intégrable en 0.
Par intégration par parties, on a par ailleurs
$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-\frac{\cos t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos x}{x^2} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$
Ainsi, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x^2} + 2\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{2}{x^2}$, et
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$
donc f est intégrable en $+\infty$.
Par ailleurs, par intégration par parties à nouveau , on a
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= [xf(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
car d'après la question précédente, $xf(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Convergence dominée

21 ♥ ☆☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$$
La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction
$$f : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si t<1} \\ \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si t=1} \\ 0 & \text{si t>1} \end{cases}$$
On pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$
Or la fonction $\varphi = t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc par théorème de convergence dominée, on a
$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

22 ♥ ★☆☆ Soit $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{1+t^\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.

23 ★☆☆ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier l'existence de I_n.
2. On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.
On rappelle l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \left|\mathrm{e}^{-nt}\frac{f(t)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\|f\|_\infty$$
or la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\|f\|_\infty$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$:
– $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t}}$ or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0.
– $t^2\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. On effectue le changement de variable $t = \frac{x^2}{n}$, et on obtient
$$I_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f\left(\frac{x^2}{n}\right) \mathrm{d}x.$$
On peut de nouveau utiliser le théorème de convergence dominée, en dominant par la fonction intégrable $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}\|f\|_\infty$. Il vient
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f\left(\frac{x^2}{n}\right) \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} f(0)\,\mathrm{d}x.$$
Comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on a $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} f(0)$.

24 ♥ ★★☆ Dans chacun des cas suivants, justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{nx}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.