7. Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

1 ♥ ☆☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n : x \mapsto \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

2 ♥ ★☆☆ Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies sur $\mathbb{R}_+$.

1. $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.
2. $f_n : x \mapsto \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.
3. $f_n : x \mapsto nx^2\mathrm{e}^{-nx}$.
4. $f_n : x \mapsto nx^2\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}$.
5. $f_n : x \mapsto \dfrac{x\sin\frac{x}{n}}{x+\frac{1}{n}}$.

1. Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Pour $x \neq 0$,
$$f_n(x) \sim \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{xn} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f nulle.
Pour la convergence uniforme :
1ère méthode : on peut remarquer que si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$, alors
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}.$$
Ainsi, $\|f_n - f\|_\infty \geqslant \frac{1}{n}$. Donc $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
2ème méthode : on explicite $\|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: on a
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}.$$
d'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Ainsi, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0.
2. $f_n(0) = 0$ et pour $x \neq 0$ on a
$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nx^3}{nx^2} = x,$$
donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$(f - f_n)(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$
On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ d'où

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$h_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	↘	0

donc $\|h_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $f_n \overset{\text{cvu}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} g$.
3. $f_n \overset{\text{cvu}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$.
4. $f_n \overset{\text{cvs}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$, mais $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc $f_n \overset{\text{cvu}}{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}} 0$.
5. $f_n \overset{\text{cvs}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$, mais $f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc $f_n \overset{\text{cvu}}{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}} 0$.

3 ♥ ★☆☆ Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants.

1. $f_n : x \mapsto \dfrac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}$.
2. $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n(1-x)$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $f_n : x \mapsto \dfrac{n\mathrm{e}^{-x}+x^2}{n+x}$.
4. $f_n : x \mapsto (1-x)^n \sin\frac{\pi x}{2}$.

1. $f_n \overset{\text{cvs}}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$, mais $f_n\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc $f_n \overset{\text{cvu}}{\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}} 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Par ailleurs, si $x \in]0,1[$,
$$f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
par croissances comparées, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
On étudie la fonction f_n sur $[0,1]$, et on trouve que $|f_n(x)|$ est maximale pour $x = \frac{n}{n+1}$, donc
$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}$$
On en déduit que $\|f_n\|_\infty \sim \mathrm{e}^{-1}n^{\alpha-1}$, donc
$$\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \alpha < 1,$$
autrement dit, (f_n) converge uniformément (vers la fonction nulle) si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Il y a convergence simple vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\forall x \in [0,1],\quad |f_n(x) - \mathrm{e}^{-x}| = \left|\frac{x^2 - x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\right| \leqslant \frac{1}{n}$$
donc $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et il y a convergence uniforme.
4. Il y a convergence simple de (f_n) vers la fonction nulle. Par ailleurs, si $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1]$,
$$|f_n(x)| \leqslant (1-x)^n \frac{\pi x}{2} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\pi}{2(n+1)}$$
car $x \mapsto (1-x)^n \frac{\pi x}{2}$ est maximale pour $x = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que (f_n) converge uniformément (vers la fonction nulle).

4 ★★☆ Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto nx^n \sin(\pi x).$$

Il y a convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction nulle.
Pour étudier la convergence uniforme, comme $x \mapsto x^n$ est maximale lorsque $x \to 1$, on pose $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. On a
$$f_n(x_n) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\mathrm{e}^{-1}.$$
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, et il n'y a pas convergence uniforme.

5 ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$$
1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
Qu'en déduire ?

6 ★☆☆ On considère la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$f_n : x \mapsto \cos^n(x)\sin(x).$$
Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n) sur $[0,\pi]$.

7 ♥ ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\cos(nx).$$
Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^\star$, et sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

8 ♥ ★☆☆ On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} nx^n \ln x & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f qu'on précisera.
2. A-t-on convergence uniforme de la suite sur $[0,1]$?
3. Montrer que pour tout $a \in [0,1[$, il y a convergence uniforme sur $[0,a]$.

9 ★☆☆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1 + x + \ldots + x^n}$$
1. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[1,+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $x \in]1,+\infty[$, on a
$$f_n(x) = x^n \frac{x-1}{x^{n+1}-1} = \frac{x-1}{x - \frac{1}{x^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{x}.$$
Par ailleurs, $f_n(1) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$.
Par ailleurs, si $x \in [1,+\infty[$,
$$f_n(x) - f(x) = \frac{x^n}{\sum_{k=0}^{n} x^k} - \frac{x-1}{x} = \frac{x^{n+1} - (x^{n+1}-1)}{x\sum_{k=0}^{n} x^k}$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est maximale pour $x = 1$, et
$$\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Comme (f_n) converge uniformément vers f sur $[1,2]$, on a
$$\int_1^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$
Or $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \ln 2$.

10 ★☆☆ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f_n : x \mapsto (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}$$
1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x.$$

11 ★★☆ Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur

un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose par ailleurs

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |u_n(x)| \leqslant a_n,$$

où a_n est le terme général d'une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P_n : x \mapsto \prod_{k=0}^{n}(1+u_k(x))$$

Montrer que la suite (P_n) converge uniformément.

Il s'agit d'abord de montrer que (P_n) converge simplement, c'est-à-dire que le produit infini a un sens. Pour tout $x \in I$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|P_n(x)-P_{n-1}(x)| &= \left|\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+u_k(x))\right)(1-(1+u_n(x)))\right| \\ &= |u_n(x)|\prod_{k=0}^{n-1}|1+u_k(x)| \\ &\leqslant a_n\prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k).\end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+a_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

donc $\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+a_k)\right)$ est bornée, et $P_n(x)-P_{n-1}(x) = \mathrm{O}(a_n)$.

Finalement, $\sum(P_n(x)-P_{n-1}(x))$ est absolument convergente, donc la suite (P_n) est convergente, vers une fonction P.

On a en fait montré que $\|P_n - P_{n-1}\|_\infty = \mathrm{O}(a_n)$, donc $\sum_n \|P_n - P_{n-1}\|_\infty$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}|P(x)-P_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(P_k(x)-P_{k-1}(x))\right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\|P_k-P_{k-1}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ceci donne la convergence uniforme de (P_n) vers P.

12 ♥ ★☆☆ On considère une fonction g continue sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n : x \mapsto \frac{n}{1+n^2x^2}.$$

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

13 ♥ ★★☆ Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}_+$, telles que

- $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(0) = 0$,
- $(f_n' + 2f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Indication. Noter $g_n = f_n' + 2f_n$ et remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

Séries de fonctions

14 ♥ Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants.

1. ★☆☆ $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx)}$.
2. ★★☆ $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+nx)^2}$.

1. Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ car $\sum f_n(0) = 0$, et si $x \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$\frac{x}{n(1+nx)} \sim \frac{1}{n^2}$$
donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\frac{n}{x}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}_{\text{indép. de } x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc il y a cvu.
2. Il y a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ car $\sum f_n(0) = 0$, et si $x \in \mathbb{R}_+^\star$,
$$\frac{x}{(1+nx)^2} \sim \frac{1}{xn^2}$$
donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente.
Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$: le défaut de convergence uniforme semble provenir du voisinage de 0, on cherchera donc à utiliser une suite qui tend vers 0.
Supposons qu'il y ait convergence uniforme, on aurait alors $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et en paricilier
$$R_n\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\begin{aligned}\left|R_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n}{(n+k)^2} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{(n+k)^2} \\ &\geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{(3n)^2} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{9n} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$
Ainsi, $|R_n\left(\frac{1}{n}\right)| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

15 ♥ ★☆☆ On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$f_n : x \mapsto \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$$

On pose, lorsque la somme est bien définie, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Montrer que S est bien définie et dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

1. Cas $x = 0$: pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge. Si maintenant $x \in]0,1]$, alors
$$\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right| \sim \frac{x^2}{n^2}.$$
Comme $\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge, on e déduit que $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, et
$$\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)}.$$
Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a $|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$. Par comparaison de SATP, la série $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge, et $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
Le théorème de dérivation terme à terme assure alors que S est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée donnée par
$$\forall x \in [0,1],\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)$$
2. Par ce qui précède, on a
$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$
Par télescopage, on a alors $S'(1) = -1$.

16 ★☆☆

1. *a.* Montrer que la fonction
$$F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$
est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.
b. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.
2. Soient $\sum c_n$ une série complexe absolument convergente et
$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int} \end{array}$$
Montrer que S est bien définie, continue, et
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}\,dt = 2\pi c_k$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose
$$u_n : x \mapsto \frac{1}{n+x}.$$
Pour tout $x \geqslant 0$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et de limite nulle, donc d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^n u_n(x)$ converge, ce qui montre que F est bien définie sur $[0,+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, u_n est continue. Pour tout $x \geqslant 0$, toujours d'après le critère des séries alternées (majoration des restes),
$$\left|F(x) - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n u_n(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\right| \leqslant \frac{1}{N+1+x} \leqslant \frac{1}{N+1}$$
d'où $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ donc d'après le théorème de continuité sous le signe somme, F est continue.
Pour tout $n \geqslant 1$, u_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on montre sans difficulté par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{(x+n)^{k+1}}k!$$
Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$,
$$\|(-1)^n u_n^{(k)}\|_\infty \leqslant \frac{k!}{n^{k+1}}.$$
Comme $k+1 > 1$, $\sum \|u_n^{(k)}\|_\infty$ converge, donc $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n : t \mapsto c_n e^{int}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t)| = |c_n|.$$
Comme $\sum c_n$ est absolument convergente, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Les f_n étant continues, S est continue.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n : t \mapsto c_n e^{int}e^{-ikt}$. De même que précédemment, $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,2\pi]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment,
$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}e^{-ikt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{int}e^{-ikt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt$$
On conclut en remarquant que
$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 2\pi & \text{si } n = k \end{cases}.$$

17 ♥ ★★☆ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on note
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}.$$

1. Montrer que S est bien définie, continue, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$.
2. Montrer que
$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

On pourra utiliser $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$.

   On pourra penser à une comparaison avec une intégrale.

1. Si $x \in \mathbb{R}_+^\star$, alors
$$\frac{1}{n+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$$
donc par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^2}$, la série $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.
On remarque que $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^\star} = \frac{1}{n}$, *donc il n'y a pas convergence normale sur* $\mathbb{R}_+^\star$. *On choisit* $[a,+\infty[$, *avec* $a>0$.
Soit $a>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, f_n est continue, positive et décroissante sur $I_a=[a,+\infty[$, donc
$$\forall x\in[a,+\infty[,\ |f_n(x)|\leqslant f_n(a)$$
donc $\|f_n\|_{\infty,I_a} = \frac{1}{n+n^2a}$. Ainsi, $\sum\|f_n\|_{\infty,I_a}$ converge.
On a alors convergence normale donc uniforme de $\sum f_n$ sur I_a. Ainsi, S est continue sur I_a pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Comme les f_n sont décroissantes, S est décroissante comme limite simple de fonctions décroissantes.
Enfin, comme $\sum f_n$ converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$,
$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

2. On a $\forall x\in\mathbb{R}_+^\star$, $xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$, où $g_n : x\mapsto xf_n(x)$.
Or
$$\forall x\in[1,+\infty[,\quad |g_n(x)| = \frac{x}{n+n^2x}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$
Ainsi, $\sum\|g_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge, et $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[1,+\infty[$. Par conséquent, le théorème de la double limite donne
$$\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
On en déduit $S(x)\sim\dfrac{\pi^2}{6x}$.

3. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t+t^2x}$ est décroissante et continue sur $[1,+\infty[$, donc pour tout $n\geqslant$,
$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}\leqslant\frac{1}{n+n^2x}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$$
Ainsi,
$$\int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}\ \leqslant\ \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\ \leqslant\ \int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}+\frac{1}{1+x}$$
Et même
$$I_N\ \leqslant\ \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\ \leqslant\ I_N+\frac{1}{1+x},$$
où $I_N=\int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$. Or
$$\begin{aligned} I_N=\int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} &= \int_1^N\left(\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}\right)\mathrm{d}t\\ &= [\ln t-\ln(1+tx)]_1^N\\ &= \ln\frac{N}{1+Nx}+\ln(1+x)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\frac{1}{x}+\ln(1+x).\end{aligned}$$
En passant à la limite $N\to+\infty$, on obtient alors
$$\ln\frac{1}{x}+\ln(1+x)\ \leqslant\ S(x)\ \leqslant\ \ln\frac{1}{x}+\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}$$
Les membres de gauche et de droite sont équivalents à $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ lorsque $x\to 0$. Par encadrement, on a donc $S(x)\underset{0}{\sim}-\ln x$.

18 ♥ ★★☆ Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^\star$, on pose
$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+kx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.