DM 5

pour le 02.11.2026

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kx}$$

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

Problème.

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes mais les résultats seront utilisés pour la résolution de la partie III.

Partie I - Calcul d'une intégrale

Dans toute cette partie, on pose pour tout $x > 0$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Pour tout $x > 0$, démontrer que
$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ixu}}{1+u^2} \, \mathrm{d}u.$$
En déduire que g est bornée sur $]0, +\infty[$.

On admet dans toute la suite que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \pi \mathrm{e}^{-x}.$$

Partie II - Formule sommatoire de Poisson

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2},$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n).$$

3. Démontrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.
4. Démontrer que F est continue sur $[0,1]$ et en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction u continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, on pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(u) = \int_0^1 u(t) \mathrm{e}^{-2i\pi kt} \, \mathrm{d}t.$$

5. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-2i\pi kt} \, \mathrm{d}t.$$

6. Pour tout $k, n \in \mathbb{Z}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie III - Applications

On rappelle les notations : $\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n)$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

7. Calculer $c_0(F)$.
   En utilisant les résultats des parties I et II, calculer $c_k(F)$ pour tout entier $k > 0$.
   On admettra que $c_{-k}(F) = c_k(F)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
8. On pose :
$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{c}_n(F)\mathrm{e}^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{c}_{-n}(F)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}.$$
   Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

On admet le résultat suivant :

Si u et v sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 1-périodiques et vérifient $c_k(u) = c_k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

9. Démontrer que $F = G$.
10. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
