Chapitre 9

Séries entières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Séries entières, rayon de convergence, somme

1. Définition

Définition - Série entière

On appelle série entière une série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont de la forme $f_n : z \mapsto a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{K}$. On note alors la série entière $\sum a_n z^n$.

Remarque. Une série entière n'est donc autre qu'une série de fonctions. Les définitions de convergence, de convergence absolue ou normale, de somme, sont donc les mêmes que précédemment.

Exemples.

- $\sum z^n$, $\sum n z^n$, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ sont des séries entières.
- $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ est une série entière qui converge simplement sur $\mathbb{C}$, dont la somme est la fonction exp.
- $\sum z^{n^2}$ est une série entière, dite lacunaire (elle a des "trous"), associée à la suite $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Le lemme ci-dessus est fondamental pour comprendre le domaine de convergence des séries entières.

Théorème - Lemme d'Abel

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in B(0, |z_0|)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration. ♥ Si $z_0 = 0$, le résultat est clair. Sinon, on considère $z \in B(0, |z_0|)$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}\right| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Par comparaison avec la série $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ qui converge car $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. □

Remarque. ♥ Le lemme d'Abel entraîne que si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors il y a convergence de $\sum a_n z^n$ lorsque z appartient au disque ouvert $B(0, |z_0|)$.

2. Rayon de convergence

Définition - Rayon de convergence

On appelle *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

On appelle disque ouvert de convergence le domaine $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$, et intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-R, R[$.

Comme pour $r = 0$, la suite $(a_n r^n)$ est bornée car nulle à partir du rang 1, l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est non vide car il contient 0. Ceci justifie l'existence de R dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Exemples.

1. Le rayon de convergence de la série $\sum z^n$ est 1.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum nz^n$ est $R = 1$.

   Démonstration. Pour tout $r \in [0, 1[$, la suite (nr^n) est bornée, donc $R \geqslant 1$, et pour $r = 1$, la suite (nr^n) n'est pas bornée, donc $R = 1$. □
3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$.

   Démonstration. Pour tout $r > 1$, la suite $\left(\frac{r^n}{n}\right)$ est non bornée, donc $R \leqslant 1$. Par ailleurs, pour $r = 1$, la suite $\left(\frac{r^n}{n}\right)$ est bornée, donc $R = 1$. □
4. Si la suite (a_n) est bornée, alors $(a_n r^n)$ est bornée pour $r = 1$, et le rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

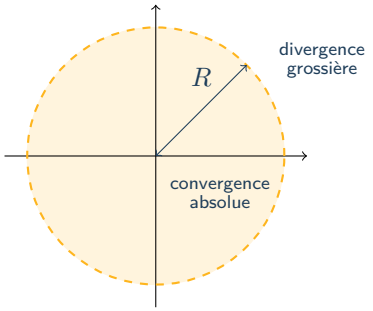
Théorème - Domaine de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

- Si $|z| < R$, il existe $r \in]|z|, R[$, et par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Par le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$, alors par définition de la borne supérieure, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. □



Remarque. Si $|z| = R$, on peut avoir convergence ou divergence de la série $\sum a_n z^n$. Pour cette raison, on dit parfois que $\{z \in \mathbb{C},\ |z| = R\}$ est le cercle d'incertitude de la série entière.

Par exemple, on sait que la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ est de rayon de convergence $R = 1$ et la série $\sum \frac{z_0^n}{n}$ converge pour $z_0 = -1$, mais diverge pour $z_0 = 1$.

Théorème

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

i. Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$.
ii. Si $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
iii. Si $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente, alors $R = |z_0|$.

Démonstration. Contentons-nous de montrer le troisième point : supposons que $\sum a_n z_0^n$ est semi-convergente.

- Comme $\sum a_n z_0^n$ ne converge pas absolument, on a $R \leqslant |z_0|$.
- Comme $\sum a_n z_0^n$ ne diverge pas grossièrement, on a $R \geqslant |z_0|$. Finalement, $R = |z_0|$. □

Remarque. Ainsi, si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence R, on a aussi :

- si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ converge, alors $R \geqslant r$,

– si pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$, la série $\sum a_n z^n$ diverge, alors $R \leqslant r$.

Exemple. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, donc $R \geqslant |z|$. Par conséquent, $R = +\infty$. □

Théorème - Règle de d'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration. Nous allons utiliser le critère de d'Alembert pour les séries numériques.

– Si $\ell = 0$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $R \geqslant |z|$. Finalement, $R = +\infty$.

– Si $\ell \in]0, +\infty[$ alors $R = \frac{1}{\ell}$:

◇ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{\ell}$, on a $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell|z| < 1$, donc $\sum a_n z^n$ converge, et $R \geqslant \frac{1}{\ell}$,

◇ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \frac{1}{\ell}$, on a $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell|z| > 1$, donc $\sum a_n z^n$ diverge, et $R \leqslant \frac{1}{\ell}$.

– Si $\ell = +\infty$, pout tout $z \in \mathbb{C}^\star$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\sum a_n z^n$ diverge. Ainsi, $R \leqslant |z|$. Finalement, $R = 0$. □

Exemple. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence 1.

Démonstration. On a $\frac{|(n+1)^\alpha|}{|n^\alpha|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où le résultat par la règle de d'Alembert. □

Ceci généralise les calculs de rayon de convergence pour les séries entières $\sum nz^n$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ effectués plus haut.

⚠ On ne cherchera pas à appliquer la règle de d'Alembert pour les séries dites lacunaires, c'est-à-dire les séries entières dont une infinité de coefficients a_n s'annulent. Pour cela, on pourra par exemple utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

Exemple. Déterminons le rayon de convergence de la série entière (lacunaire) donnée par $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, on a

$$\frac{(n+1)^{n+1}|\,|z|^{3(n+1)}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^n|z|^{3n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z|^3 = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\,|z|^3.$$

Ainsi, par la règle de d'Alembert, il y a convergence de $\sum \frac{n^n}{n!} z^{3n}$ si $|z| < \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$, et divergence si $|z| > \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. Ainsi, le rayon de convergence est $R = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

3. Comparaison de séries entières

Théorème - Théorème de comparaison

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

– Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.
– Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
– Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration.

– On suppose que $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang N. Si $|z| < R_b$, alors $\sum |b_n z^n|$ converge, et comme $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$ pour tout $n \geqslant N$, on déduit par comparaison que la série $\sum a_n z^n$ converge. Ceci assure que $R_a \geqslant R_b$.

- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors il existe $M \geqslant 0$ tel que $|a_n| \leqslant M|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on peut conclure comme dans le cas précédent. Le résultat est vrai en particulier si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$.
- Si $a_n \sim b_n$, alors $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ et $b_n = \mathrm{O}(a_n)$, donc les deux points ci-dessus concluent. □

Remarque. En particulier, pour déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, on pourra commencer si besoin par remplacer a_n par un équivalent simple, sans changer le rayon de convergence.

Corollaire - Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$

Pour toute suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. On note R (resp. R') le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ (resp. de $\sum n a_n z^n$).

- Comme $a_n = \mathrm{o}(n a_n)$, on a $R \geqslant R'$.
- Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, montrons que $\sum n a_n z^n$ converge. On considère un réel r tel que $|z| < r < R$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|n a_n z^n| = n|a_n| r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$
Par croissance comparée, on a $n\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{|z|}{r} < 1$, donc $n a_n z^n = n\left(\frac{|z|}{r}\right)^n a_n r^n = \mathrm{o}(a_n r^n)$.
Par comparaison, la série $\sum n a_n z^n$ converge donc absolument. Ceci entraîne que □

4. Séries entières et opérations

Théorème - Somme de séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

- La série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est de rayon de convergence R qui vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
- Si de plus $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration.

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$. Comme $|z| < R_a$ et $|z| < R_b$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. Par conséquent, leur somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge absolument. On en déduit que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, supposons par exemple $R_a < R_b$. Alors, si $|z| \in]R_a, R_b[$, on a $\sum a_n z^n$ diverge et $\sum b_n z^n$ converge. On sait alors que leur somme est divergente. □

Théorème - Produit de séries entières, produit de Cauchy

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Le produit de Cauchy des deux séries est la série entière
$$\sum c_n z^n, \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$
Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc leur produit de Cauchy est absolument convergent, et par produit de Cauchy,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n.$$
On en déduit en particulier que $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. □

⚠ Le rayon de convergence de la série produit peut être strictement supérieur à $\min(R_a, R_b)$.

Exemple. La série entière $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1 et pour tout $|z| < 1$, par produit de Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

II Régularité de la somme d'une série entière

1. Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe

Théorème - Convergence normale locale dans le disque ouvert de convergence

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{B}(0,r)$, où $r < R$.

Démonstration. Si $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall z \in \overline{B}(0,r), \quad |a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n.$$

Comme $r < R$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, ce qui assure la convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur $\overline{B}(0,r)$. □

⚠ Il n'y a pas nécessairement convergence normale sur le disque ouvert de convergence $B(0,R)$. Par exemple :

$\sum \frac{z^n}{n}$ ne converge pas normalement sur $D = B(0,1)$: si $f_n : z \mapsto \frac{z^n}{n}$, alors $\sum \|f_n\|_{\infty,D} = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

En revanche, si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, alors il y a convergence normale sur $\overline{B}(0,R)$.

Corollaire - Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. Soient $z \in \mathrm{B}(0,R)$ et r tel que $|z| < r < R$. On sait qu'il y a convergence normale, et donc uniforme, de la série entière sur $\overline{B}(0,r)$. Comme par ailleurs les fonctions $z \mapsto a_n z^n$ sont continues, il y a continuité de la limite uniforme de la série de fonctions, c'est-à-dire de somme de la série entière sur $\overline{B}(0,r)$, et donc en z. □

Remarque. Comme on l'a vu ci-dessus, si $\sum a_n R^n$ est absolument convergente, alors il y a convergence normale sur le disque fermé $\overline{B}(0,R)$, et la somme est donc continue sur $\overline{B}(0,R)$.

2. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: les séries entières considérées ont leurs coefficients réels, et seront étudiées dans $\mathbb{R}$.

Le théorème ci-dessous assure que, *dans le cas réel*, la somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition.

Théorème - Théorème d'Abel radial, admis

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^\star$, telle que $\sum a_n R^n$ converge. Alors

$$\sum a_n x^n \underset{x \to R^-}{\longrightarrow} \sum a_n R^n.$$

Démonstration. La preuve est hors programme, et repose sur une transformation d'Abel pour montrer que si $\sum a_n R^n$ converge, alors on a convergence uniforme de la série entière sur tout le segment $[0,R]$. □

Remarques.

– Notons que lorsque $\sum a_n R^n$ converge absolument, le théorème d'Abel radial n'est pas nécessaire pour conclure : on a vu dans le paragraphe précédent qu'on a alors convergence normale sur $[-R,R]$.

– En appliquant le théorème d'Abel radial à la série entière $\sum(-1)^n a_n x^n$, on obtient le même résultat en $-R$: si $\sum a_n(-R)^n$ converge, alors
$$\sum a_n x^n \underset{x\to -R^+}{\longrightarrow} \sum a_n(-R)^n.$$

Ceci entraîne le résultat de régularité suivant.

Corollaire - Continuité de la somme d'une série entière de la variable réelle

La somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ est continue sur son domaine de définition.

Démonstration. Si $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$, le domaine de définition de sa somme f est un intervalle d'extrémités $-R$ et R. Le théorème d'Abel radial énoncé ci-dessus entraîne que si f est définie en R, elle est continue en R. La remarque ci-dessus donne le même résultat en $-R$. □

Théorème - Dérivation de la somme d'une série entière réelle

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$, et
$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}.$$

Remarque. Comme on l'a vu plus haut, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Par conséquent les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont également même rayon de convergence.

Démonstration. On note qu'il suffit de montrer le résultat sur tout intervalle $[-r, r]$, où $r < R$. Si $r < R$, on applique le théorème de dérivation terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto a_n x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions f_n sont $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$, et

– la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-r, r]$,
– la série de fonctions $\sum f_n' = \sum n\, a_n x^{n-1}$ converge uniformément sur $[-r, r]$.

Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$, et pour tout $x \in [-r, r]$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. □

On obtient alors par récurrence immédiate le résultat de régularité suivant.

Théorème - Régularité de la somme d'une série entière réelle

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in]-R, R[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}.$$

Par ailleurs, $\sum_{n\geqslant k} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum (n+1)\dots(n+k)\, a_{n+k}\, x^n$ est de rayon de convergence R.

Remarque. On retiendra qu'on peut dériver indéfiniment la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et la dérivation se fait terme à terme. Les séries entières dérivées sont également de rayon de convergence R.

Exemples.

– Comme $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et pour somme $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, on en déduit en dérivant que pour tout $x \in]-1, 1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

– Plus généralement, en dérivant k fois f, on obtient :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\, x^n.$$

On en déduit l'identité binomiale : pour tout $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$.

Corollaire - Expression des coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration. D'après la formule de dérivation ci-dessus, on a $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$, ce qui conclut. □

Remarque. Si la fonction f est paire, alors $f^{(2k)}$ est paire et $f^{(2k+1)}$ est impaire pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi [1], on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)} = 0$. De même, si f est impaire, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k)} = 0$.
Par conséquent, si f est développable en série entière, de série entière associée $\sum a_n x^n$, alors par le corollaire ci-dessus :

$$\text{Si } f \text{ est paire, alors } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0, \text{ et si } f \text{ est impaire, alors } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0.$$

Nous voyons ci-dessous que, de même que pour la dérivation, on peut intégrer terme à terme une série entière sur son disque ouvert de convergence.

Théorème - Intégration de la somme d'une série entière réelle

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme. Si F est une primitive de f, alors

$$\forall x \in]-R,R[,\quad F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Démonstration. On sait déjà que $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a même rayon de convergence R que $\sum a_n x^n$ par dérivation.
Si on note G sa somme, on sait qu'on peut dériver G terme à terme sur $]-R,R[$, et

$$\forall x \in]-R,R[,\quad G'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x).$$

Ainsi, G est une primitive de f sur $]-R,R[$, et, comme $G(0) = 0$, on a $F = G + F(0)$ sur $]-R,R[$. □

III Fonctions développables en série entière

1. Généralités

Définition - Fonction développable en série entière

Soit $r > 0$. On dit qu'une fonction f est développable en série entière sur $B(0,r)$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall z \in B(0,r),\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $B(0,r)$.

Exemples.

– La fonction exp est développable en série entière sur $\mathbb{C}$: on sait que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

1. Une fonction paire dérivable a une dérivée nulle en 0.

On rappelle que ce résultat est obtenu par exemple à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, x \in I$ et s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [a, x]$, alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$ et $f : t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$, alors f est $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f^{(k)}(t) = z^k \mathrm{e}^{tz}$. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f^{(n+1)}(t)| = |z|^{n+1}\mathrm{e}^{tz} \leqslant |z|^{n+1}\mathrm{e}^{|tz|} \leqslant |z|^{n+1}\mathrm{e}^{|z|}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| = \left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leqslant \mathrm{e}^{|z|} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

– La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $B(0,1)$:

$$\forall z \in B(0,1), \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Théorème - Développement en série entière et série de Taylor

Si f est une fonction réelle développable en série entière sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et égale à son développement de Taylor en 0 sur $]-r, r[$:

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire ci-dessus. □

⚠
– La réciproque est fausse ! Il existe des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui ne sont égales à leur développement de Taylor sur aucun intervalle $]-r, r[$. Dans ce cas f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.
– Il se peut également que f soit développable en série entière au voisinage de 0, ait une série de Taylor de rayon de convergence $R > 0$ sans que f soit développable en série entière sur $]-R, R[$ tout entier.

Exercice 1. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. En déduire que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Conclure que la série de Taylor de f a un rayon de convergence infini, mais f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Corollaire - Unicité du développement en série entière

Si $r > 0$ et $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières dont les sommes coïncident sur $]-r, r[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Remarque. D'après les opérations sur les séries entières, on a : si f, g sont deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0, de séries entières respectives $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, alors :

◇ $\lambda f + \mu g$ est développable en série entière au voisinage de 0, de série entière $\sum(\lambda a_n + \mu b_n) z^n$,
◇ fg est développable en série entière au voisinage de 0, de série entière le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

2. Développements en série entière usuels

Théorème - Cosinus, sinus

Les fonctions cos et sin sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. On utilise le développement en série entière de exp sur $\mathbb{C}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\mathrm{i}x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)\frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k}x^{2k}}{(2k)!},$$

ce qui conclut car $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$. De même pour sin. □

Théorème - Cosinus, sinus hyperbooliques

Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. La démarche est la même que dans le résultat précédent : on utilise le développement en série entière de exp, que l'on injecte dans les relations $\mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\mathrm{sh}\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. □

Théorème - Arctangente

La fonction arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1], \quad \arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Démonstration. On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. Par intégration, on a alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan x = \arctan 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

La somme étant bien définie pour $x = 1$, on déduit par Abel radial que l'égalité est valable pour $x \in]-1,1]$. □

Théorème - Logarithme

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et on a

$$\forall x \in]-1,1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. Ainsi, par intégration de la somme de la série entière $\sum x^n$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \ln(1+0) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

La somme est bien définie pour $x = 1$, donc par Abel radial, la continuité en 1 entraîne que l'égalité ci-dessus et valable pour $x \in]-1,1]$. □

Remarques.

– On retiendra en particulier que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

– On a donc, pour tout $x \in [-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Théorème - $(1+x)^\alpha$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Démonstration. On commence par remarquer que f est la solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$\begin{cases} (1+x)\,y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

C'en est d'ailleurs l'unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Or si y est développable en série entière en 0, de série entière associée $\sum a_n x^n$, alors pour tout x dans le disque ouvert de convergence,

$$\begin{aligned} (1+x)y'(x) - \alpha y(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n\big) x^n. \end{aligned}$$

Ainsi, si y est solution de (1), on obtient par unicité des coefficients du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0, \quad i.e. \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

Par une récurrence directe, on montre alors que pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$, car $a_0 = y(0) = 1$.

Réciproquement, la série entière $\sum a_n x^n$, où les a_n (non nuls) sont définis ci-dessus, est de rayon de convergence 1 par la règle de d'Alembert, car

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, le calcul ci-dessus montre que sa somme est solution de (1). Par unicité, la somme de la série entière coïncide avec f, ce qui conclut. □

Remarque. Dans le cas $\alpha \in \mathbb{N}$, le développement en série entière n'est autre que la formule du binôme. On obtient une série entière dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang, de rayon de convergence $+\infty$.