Chapitre 8

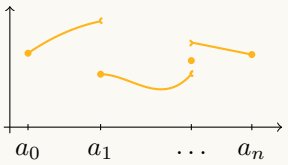
Intégration sur un intervalle quelconque

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition - Fonctions continues par morceaux

On dit qu'une fonction $f \in \mathscr{F}(S, \mathbb{K})$ est continue par morceaux sur un segment S s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de I telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$f|_{]a_k, a_{k+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$.



Si I est un intervalle quelconque, on dit que $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ est continue par morceaux sur I si pour tout segment $S \subset I$, la fonction $f|_S$ est continue par morceaux sur S.

Dans la suite, on note $\mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment I.

Exemples.

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux, car sa restriction à tout segment est continue par morceaux (avec un nombre fini de morceaux).
- La fonction $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Remarque. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée : il suffit d'appliquer le théorème des bornes atteintes au prolongement continu de f sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$.

I Intégrale sur un intervalle quelconque

1. Intégrale sur un intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$

Nous nous intéressons ici à l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un intervalle du type $I = [a, b[$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'intégration sur un intervalle du type $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, est analogue.

Définition - Intégrale généralisée sur $[a, b[$

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est *convergente* si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite dans $\mathbb{K}$ en b. Dans ce cas, on note cette limite $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ou encore $\int_I f$.

⚠ Dans le cas où la limite ci-dessus n'existe pas, on dit que l'intégrale est divergente. Dans ce cas, on peut toujours écrire l'intégrale $\int_a^b f$, mais $\int_a^b f$ ne désigne pas un nombre.

Remarques.

- Lorsque la fonction f n'est pas définie en l'une des bornes a ou b, on dit que $\int_a^b f$ est impropre en cette borne. Étudier la nature de l'intégrale impropre, c'est déterminer si elle converge ou non.
  On peut par exemple faire un calcul d'intégrale sur un segment $[a, x]$, puis un passage à la limite.
- Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, alors en écrivant les intégrales sur des segments, on a :
$$\left|\int_a^b f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \leqslant \|f\|_\infty (b - x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} 0, \quad \text{donc} \quad \int_a^x f \underset{x \to b}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$
  Ainsi, considérer l'intégrale généralisée où l'intégrale sur le segment $[a, b]$ revient au même.

– Si f est continue sur $[a,b[$ et F est une primitive de f sur $[a,b[$, alors pour tout $x\in[a,b[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)-F(a)$, donc $\int_a^b f$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie en b.

– Si $f\in\mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{K})$ et $c\in[a,b[$, alors $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_c^b f$ converge :

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f \text{ existe dans } \mathbb{K} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to b}\left(\int_a^c f+\int_c^x f\right) \text{ existe dans } \mathbb{K}.$$

Le choix de la borne non impropre n'importe donc pas pour déterminer la nature de l'intégrale.

Exemple. Étude de la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$, qui est impropre en 0. Pour tout $x\in]0,1]$, on a

$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t \;=\; [t\ln t - t]_x^1 \;=\; -1 - x\ln x + x.$$

Ainsi, $\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$, donc l'intégrale est convergente, et $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -1$.

Dans le cas où f n'est pas définie en une des bornes réelles a ou b, mais est prolongeable par continuité en ce point, tout se passe comme lorsqu'on intègre sur un segment. On parle alors d'intégrale faussement impropre.

Théorème - Intégrale faussement impropre

Soit $f\in\mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{K})$ avec $b\in\mathbb{R}$, et prolongeable par continuité en b. On note $\tilde{f}$ le prolongement sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour tout $x\in[a,b[$, on a $\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$, or nous avons vu que $\int_a^x \tilde{f} \underset{x\to b}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}$ car $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. □

Exemple. L'intégrale $\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente, car $t\mapsto t\ln t$ est continue sur $]0,1]$ et a une limite finie en 0.

2. Intégrales de référence

Nous allons voir que pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée, il est possible comme dans le cas des séries de se ramener à des comparaisons avec des intégrales dont on connait la nature. Il sera alors précieux de connaître le comportement d'intégrales types.

Théorème - Intégrales de Riemann

Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a,b\in\mathbb{R}$.

i. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

ii. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha<1$.

iii. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(t-b)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent si et seulement si $\alpha<1$.

Démonstration. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Si $\alpha\neq 1$, on a

$$\int_1^x\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x \;=\; \frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{(\alpha-1)\,x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1,\\ +\infty & \text{si } \alpha<1\end{cases}$$

Par ailleurs, $\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^x = \ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

Les autres cas sont analogues, et laissés en exercice. □

Exemples.

1. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

2. Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$ sont divergentes.

Théorème - Intégrale exponentielle

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.

Démonstration. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- On a $\displaystyle\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc l'intégrale diverge lorsque $\lambda = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0, \\ +\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$

Par conséquent, l'intégrale converge si et seulement si $\lambda > 0$. □

Théorème - Intégrale du logarithme

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration. Rencontré plus haut. □

Le cas des intégrales de Bertrand, évoqué dans l'exercice suivant, n'est pas au programme, mais le résultat est à connaître, et à savoir redémontrer si besoin.

Exercice : Intégrales de Bertrand. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on note $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t$. Montrer que :

- si $\alpha > 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ converge,
- si $\alpha = 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$,
- si $\alpha < 1$, alors l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ diverge.

3. Intégrale sur un intervalle $]a, b[$

On suppose ici que $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et on s'intéresse à l'intégration de fonctions continues par morceaux sur $I =]a, b[$.

Définition - Intégrale généralisée sur $]a, b[$

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}(]a, b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, on dit que $\int_a^b f$ est convergente en a et en b. On pose alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarques.

- Si $\int_a^b f$ est convergente, alors on a même : pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent.
- Pour montrer la convergence, il suffit de vérifier qu'il existe $c, d \in]a, b[$ tels que $\int_a^c f$ et $\int_d^b f$ convergent.
- Pour montrer la divergence, il suffit de prouver la divergence en l'une des bornes.

⚠ Il ne suffit pas de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge.

Exemple. On a $\int_{-x}^x t\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge.

4. Propriétés

Nous allons voir que, sous réserve de convergence, les propriétés des intégrales sur un segment se généralisent au cas des intégrales sur un intervalle quelconque.

Nous énonçons les résultats pour des fonctions continues par morceaux sur $I = [a, b[$, mais ils sont tout autant valables pour le cas $I =]a, b]$ ou $I =]a, b[$.

Théorème - Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge, et $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b f$.
- Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b g$ diverge, alors $\int_a^b (f + g)$ diverge.

Démonstration. Le résultat découle directement de la linéarité de l'intégrale sur un segment et des résultats sur les limites, par convergence des intégrales. □

Remarque. ⚠ Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent, on ne peut rien conclure en général sur la nature de $\int_a^b (f + g)$.

Théorème - Positivité et croissance

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{R})$ telles que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.

- *Positivité.* Si f est positive sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- *Croissance.* Si $f \leqslant g$ sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Stricte positivité.* Si f est continue, positive sur $[a, b[$ et non identiquement nulle, alors $\int_a^b f > 0$.

Démonstration. Comme ci-dessus, les résultats se déduisent de leurs analogues pour les intégrales sur un segment, combinés avec les propriétés de passage à la limite. □

Remarque. ⚠ La propriété de stricte positivité requiert la continuité. Elle est par ailleurs souvent utilisée sous sa forme contraposée, qui doit être très bien connue :

si f est continue et positive sur $[a, b[$, d'intégrale convergente nulle, alors f est identiquement nulle.

Si f n'est pas positive, le résultat n'est bien sûr par valable non plus.

Théorème - Relation de Chasles

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$ telle que $\int_a^b f$ converge. Alors pour tout $c \in [a, b[$,

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}, \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Ceci découle directement de la relation de Chasles pour les intégrales sur un segment, et de la définition de la convergence de l'intégrale généralisée. □

Théorème - Intégrale fonction d'une de ses bornes

Soit $f \in \mathscr{C}([a, b[, \mathbb{K})$ telle que $\int_a^b f$ converge. La fonction

$$G : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a, b[$, et pour tout $x \in [a, b[$, $G'(x) = -f(x)$.

Démonstration. Soient F une primitive de f sur $[a,b[$ et $c\in[a,b[$. Pour tout $x\in[a,b[$, on a

$$G(x)=\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(c)-F(x)+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, G est dérivable sur $[a,b[$, de pour tout $x\in[a,b[$, $G'(x)=-f(x)$. □

Remarques.

- De même, si $f\in\mathscr{C}(]a,b],\mathbb{K})$ telle que $\int_a^b f$ converge et $G:x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, alors G est dérivable sur $]a,b]$, et $\forall x\in]a,b]$, $G'(x)=f(x)$.
- ⚠ Dans ce résultat la fonction est supposée continue.

Théorème - Limite non nulle en $+\infty$

Si $f\in\mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ a une limite finie non nulle en $+\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

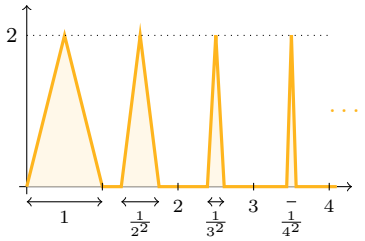
Démonstration. Montrons le résultat dans le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et f a une limite $\ell>0$. On sait alors qu'il existe un réel $A>a$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $f(x)>\frac{\ell}{2}$, ainsi

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t+\int_A^x \underbrace{f(t)}_{\geqslant\frac{\ell}{2}}\,\mathrm{d}t\geqslant\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t+(x-A)\,\frac{\ell}{2}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge. Le cas $\ell<0$ est similaire, et dans le cas complexe, on se ramène au cas réel en remarquant que si f a une limite non nulle, alors $\mathfrak{Re}\,f$ ou $\mathfrak{Im}\,f$ a une limite non nulle en $+\infty$. □

⚠ La situation diffère de celle des séries ! Il convient de bien retenir : IL NE SUFFIT PAS QUE $f(t)\underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow}0$ POUR AVOIR DIVERGENCE DE $\int_a^{+\infty} f$.

On retiendra l'exemple suivant : si f est une fonction affine par morceaux représentée ci-dessous, alors son intégrale, somme des aires des triangles, converge, mais la fonction f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.



On a $f(t)\underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow}0$: si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=n$ et $y_n=n+\frac{1}{2}$, alors

$$x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty \text{ et } y_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty, \text{ mais } f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0 \text{ et } f(y_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2.$$

Par ailleurs, $\int_0^{+\infty} f$ converge, comme nous le préciserons plus loin.

II Intégrabilité des fonctions à valeurs positives

Comme dans le cas des séries, l'étude de la nature de l'intégrale d'une fonction positive se fait très souvent au moyen de comparaison avec des intégrales dont on connait la nature, les intégrales de référence ci-dessus par exemple. Les raisons pour lesquelles ces comparaisons sont valables sont essentiellement les mêmes que pour les séries.

Comme précédemment, nous énonçons les résultats pour des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a,b[$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, mais ils sont aussi valables pour les autres types.

Théorème - Convergence de l'intégrale d'une fonction positive

Si $f\in\mathscr{C}([a,b[,\mathbb{R})$ est une fonction *positive*, alors

$$\int_a^b f \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est bornée sur } [a,b[.$$

En cas de convergence, on a : $\forall x\in[a,b[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Par positivité de l'intégrale, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante, donc il s'agit d'une simple application du théorème de la limite monotone. □

Remarque. Plus généralement, le théorème de la limite monotone assure que si f est positive, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet toujours une limite, qui vaut $+\infty$ en cas de divergence.

Ceci motive la notation suivante, qui fait écho aux familles sommables de termes positifs.

Notation dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{R})$ est positive et $\displaystyle\int_a^b f$ diverge, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Le programme précise que *pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence*. On pourra donc écrire des majorations sans vérifier au préalable que les intégrales sont finies, et plus généralement mener les calculs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Exemple. Revenons sur la fonction f dont nous avons donné la courbe page 5, et qui est continue, positive sur $[0,+\infty[$.

$$\forall x \in [0,+\infty[,\quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor+1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor+1}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},\quad \text{donc}\quad \int_0^{+\infty} f \text{ converge.}$$

Théorème - Théorème de comparaison

Soient $f,g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,b[$.

- Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.
- Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Démonstration. On démontre seulement le premier point, l'autre s'obtenant pas contraposée. Par croissance de l'intégrale, on a

$$\forall x \in [a,b[,\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

comme $\int_a^b g$ converge. Ainsi, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante et bornée donc a une limite finie en b, et $\int_a^b f$ converge. □

Remarque. D'après ce qui précède, le théorème est encore valable si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur un voisinage de b dans $[a,b[$ seulement. Ainsi, il n'est pas nécessaire que la borne a soit la même pour la comparaison.

Théorème - Théorème de comparaison

Soient $f,g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{R})$ positives.

- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}\,(g(t))$ et $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}\,(g(t))$ et $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont même nature.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème précédent :

- si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}\,(g(t))$, alors $f \leqslant g$ sur un voisinage de b, ce qui permet de conclure,
- si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}\,(g(t))$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $f \leqslant Mg$ sur un voisinage de b, ce qui permet aussi de conclure.
- si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors on a $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}\,(g(t))$ et $g(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}\,(f(t))$, ce qui conclut par le point précédent. □

Remarque. Comme précédemment, il n'est pas nécessaire que la borne a soit la même dans les deux intégrales.

Exemples.

1. Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)+2}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)+2}{t^3+1}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et

$$t^2\,\frac{\ln(t)+2}{t^3+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2\ln t}{t^3} = \frac{\ln t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(t)+2}{t^3+1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit par comparaison que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)+2}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ converge également.

2. **Intégrale de Gauss**. Montrons que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}$ est convergente.

   On a $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison, comme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   De même, $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to-\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

3. Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{t}}{t}$ est continue sur $]0,1]$, et

$$\frac{\sin\sqrt{t}}{t} \underset{t\to0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

   Comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale (de Riemann) convergente, on déduit par comparaison que $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Notons que la positivité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 permet d'utiliser le théorème.

4. **Fonction Gamma d'Euler**. Cherchons pour quelles valeurs réelles de x la fonction Γ est bien définie, où

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

   – En 0 : on a

$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}},$$

   or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x-1<1$, c'est-à-dire $x>0$.

   – En $+\infty$: par croissance comparée, on a

$$t^2\,t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{donc} \quad t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

   donc par comparaison, comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarques.

– Comme pour les séries, on pensera souvent à comparer une intégrale à une intégrale de Riemann pour prouver sa convergence ou sa divergence.
– Seule la positivité d'une des deux fonctions f, g suffit : si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, alors f et g sont de même signe au voisinage de b.
– Il suffit plus généralement que f ou g soit de signe constant au voisinage de b pour appliquer le résultat.

III Fonctions intégrables

Dans toute la suite, I désigne un intervalle quelconque.

Définition - Fonctions intégrables

On dit que $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I,\mathbb{K})$ est intégrable sur I, si l'intégrale $\int_I |f|$ est convergente. On dit alors que l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente.

On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, ou parfois plus simplement $L^1(I)$.

Remarques.

– L'intégrabilité est la notion analogue à celle de famille sommable pour les sommes.
– Si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{K})$, on dit que f est intégrable en b s'il existe $c \in [a,b[$ tel que l'intégrale $\int_c^b |f|$ converge. De même en a. Ainsi, f est intégrable sur $I =]a,b[$ si et seulement si f est intégrable en a et en b.

Le résultat suivant est analogue à celui rencontré sur les séries.

Théorème - Convergence absolue et convergence

Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$. Si $\int_I f$ converge absolument, alors $\int_I f$ converge.

Démonstration. La preuve est analogue à celle pour les séries.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: on a $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$, donc par comparaison, $\int_I f + |f|$ converge, ce qui entraîne que $\int_I f$ converge : sinon comme $\int_I |f|$, on aurait divergence de $\int_I (f + |f|)$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: comme $|\operatorname{Re} f| \leqslant |f|$ et $|\operatorname{Im} f| \leqslant |f|$, on a convergence absolue de $\int_I \operatorname{Re} f$ et $\int_I \operatorname{Im} f$, donc convergence par le cas précédent, ce qui conclut. □

⚠ Comme pour les séries, la réciproque est fausse ! Il existe des fonctions dont l'intégrale converge sur un intervalle I, mais pas absolument. On parle parfois d'intégrales semi-convergentes.
À ce titre, l'exemple suivant est **à connaître, et à maîtriser parfaitement**.

Exemple. On note $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. On a :

$$f \notin L^1(\mathbb{R}_+), \quad \text{mais} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}$$

♥ **La fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$:**

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t.$$

Or $|\sin|$ étant π-périodique, on a $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi} = 2$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\pi} = +\infty.$$

♥ **L'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ converge** : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car faussement impropre en 0, et pour tout $x \geqslant 1$, on a par intégration par parties :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Ceci justifie que $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème - Inégalité triangulaire

Si $f \in L^1(I, \mathbb{K})$, alors

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Démonstration. Si $I = [a, b[$, alors pour tout $x \in [a, b[$, on a par inégalité triangulaire sur un segment,

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

d'on le résultat en passant à limite $x \to b$. □

Théorème - L'espace $L^1(I, \mathbb{K})$

$L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par ailleurs, si on pose pour toute fonction $f \in L^1(I, \mathbb{K})$

$$\|f\|_1 = \int_I |f|,$$

alors $\|\cdot\|_1$ est une norme sur l'espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$.

Démonstration. On voit aisément que $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{\mathrm{m}}(I,\mathbb{K})$: la fonction nulle est intégrable, et si $f,g \in L^1(I,\mathbb{K})$, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, alors $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|$. Comme, par linéarité,

$$\int_I (|\lambda|\,|f| + |\mu|\,|g|) \;=\; |\lambda| \int_I |f| + |\mu| \int_I |g| \;<\; +\infty,$$

on obtient par comparaison que $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.

Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $L^1(I,\mathbb{K}) \cap \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. L'homogénéité provient de la linéarité , et l'inégalité triangulaire a déjà été vue. La séparation découle de la stricte positivité : si f est intégrable, continue et $\int_I |f| = 0$, alors $|f|$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur I, donc elle est identiquement nulle sur I. □

IV Méthodes de calcul d'intégrales

Le calcul d'une intégrale n'est pas toujours chose aisée, on retiendra les techniques essentielles pour y parvenir :

- le calcul explicite à l'aide d'une primitive de la fonction à intégrer,
- le recours à une intégration par parties,
- le recours à un changement de variable.

Nous détaillons ces deux derniers points dans le cas d'une intégrale généralisée.

1. Changement de variable

Rappelons tout d'abord le changement de variable sur un segment.

Théorème - Changement de variable sur un segment

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $[\alpha,\beta]$ un segment. Si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1([\alpha,\beta],I)$, alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. En notant F une primitive de f sur I, on remarque par une dérivation composée que $F \circ \varphi$ est une primitive de $t \mapsto f(\varphi(u))\varphi'(u)$. Ainsi,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \;=\; [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta \;=\; F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \;=\; [F(t)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$ □

Dans le cas d'une intégrale généralisée, le changement de variable φ devra être choisi strictement monotone et de classe $\mathscr{C}^1$ (donc bijectif).

Théorème - Changement de variable pour une intégrale généralisée

Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1(J,I)$ une bijection de J sur I strictement croissante. On note a,b les extrémités de I et α,β celles de J, avec $a<b$ et $\alpha<\beta$.
Alors les intégrales $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Nous nous contentons de prouver le résultat lorsque I est de la forme $I=[a,b[$, et donc $J=[\alpha,\beta[$. Pour tout $y \in [a,b[$, si on note $x=\varphi^{-1}(y)$, alors on a par le théorème de changement de variable sur un segment :

$$\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\alpha^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

car $a=\varphi(\alpha)$ et $y=\varphi(x)$. Par ailleurs, par passage à la limite, comme $y=\varphi(x) \underset{x\to\beta}{\longrightarrow} \varphi(\beta)=b$, les intégrales sont de même nature, et les limites sont égales en cas de convergence. □

2. Intégration par parties

Notation. Si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, et si f admet des limites respectives en a^+ et en b^-, on note

$$[f(t)]_a^b = \lim_{t \to b^-} f(t) - \lim_{t \to a^+} f(t).$$

Le théorème ci-dessous généralise l'intégration par parties sur un segment. Il s'obtient de manière immédiate par passage à la limite.

Théorème - Intégration par parties

Soient I un intervalle d'extrémités $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, avec $a < b$, et $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. On suppose que

- les fonctions f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$,
- la fonction fg admet une limite dans $\mathbb{K}$ en a^+ et en b^-.

Alors $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Dans le cas où $I = [a, b[$, par intégration par parties sur le segment $[a, x]$

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $[f(t)g(t)]_a^x$ a une limite finie lorsque $x \to b$, les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence, on a l'égalité en passant à la limite pour $x \to b$. □

Exemple. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Comme on l'a vu, si $x > 0$, les intégrales définissant $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$ convergent. Ainsi, par intégration par parties,

$$\Gamma(x) = \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x),$$

car $t^x \mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

V Intégration des relations de comparaison

Les résultats qui suivent sont les exacts analogues des résultats de sommation des relations de comparaison pour les séries : on compare les restes des intégrales en cas de convergence, et les intégrales partielles en cas de divergence.

On écrit à nouveau les résultats sur l'intervalle $[a, b[$, mais ils sont valables sur $]a, b]$ en adaptant.

Théorème - Intégration des relations de comparaison, cas convergent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$. On suppose que g est positive et intégrable en b.

- Si $f(t) \underset{t \to b}{=} \mathrm{o}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x \to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right)$.
- Si $f(t) \underset{t \to b}{=} \mathrm{O}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x \to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g\right)$.
- Si $f(t) \underset{t \to b}{\sim} \mathrm{o}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g$.

Démonstration. Montrons le premier résultat, les autres sont des adaptations, comme pour les séries. On fixe $\varepsilon > 0$, et on sait qu'il existe $\beta \in [a, b[$ tel que pout tout $t \in [\beta, b[$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon |g(t)| = \varepsilon g(t)$. Ainsi, si $x \geqslant \beta$,

$$\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{donc} \quad \int_a^x f \underset{x \to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g\right).$$ □

Théorème - Intégration des relations de comparaison, cas divergent

Soient $f, g \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{K})$. On suppose que g est positive et non intégrable en b.

- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{o}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} \mathrm{O}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} \mathrm{o}\,(g(t))$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$.

Démonstration. De même, montrons le premier point. On fixe $\varepsilon > 0$, et β tel que pout tout $t \in [\beta, b[$, $|f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\, g(t)$. Pour tout $x \geqslant \beta$,

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_\beta^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_\beta^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or comme g est non intégrable en b et g est positive, on a $\int_\beta^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\longrightarrow} +\infty$, comme on l'a vu plus haut, par le théorème de la limite monotone.

Il existe donc $\beta' \in [\beta, b[$ tel que pour tout $x \in [\beta', b[$, $\frac{\varepsilon}{2}\int_\beta^x g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Ainsi, si $x \in [\beta', b[$, alors

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\int_\beta^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad \int_a^x f \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g\right). \qquad \square$$

Exemples.

1. On cherche un équivalent de $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to 0$.

   On pose $f : t \mapsto \frac{1}{\sin t}$. Comme $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, la fonction f n'est pas intégrable en 0. Ainsi,

   $$\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

   et $\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \underset{x\to 0}{\sim} = -\ln x$ par intégration des relations de comparaison.

2. Soit $x > 0$. On cherche un équivalent de $\displaystyle\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ en 0.

   Comme $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, la convergence de l'intégrale entraîne par intégration des relations de comparaison

   $$\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{y\to 0}{\sim} \int_0^y t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{y^x}{x}.$$

3. Soit $a > 1$. On cherche un équivalent de $\displaystyle\int_1^x \ln^a t\,\mathrm{d}t$.

   On effectue une intégration par parties :

   $$\int_1^x \ln^a t\,\mathrm{d}t = [t\ln^a t]_1^x - \int_1^x a\ln^{a-1} t\,\mathrm{d}t = x\ln^a x - a\int_1^x \ln^{a-1} t\,\mathrm{d}t$$

   Or comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln^a t\,\mathrm{d}t$ diverge et $\ln^{a-1} t \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(\ln^a t)$, on a par intégration des relations de comparaison,

   $$\int_1^x \ln^{a-1} t\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_1^x \ln^a t\,\mathrm{d}t\right), \quad \text{donc} \quad \int_1^x \ln^a t\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln^a x.$$

Remarque. De même que la sommation des relations de comparaison permet de démontrer le lemme de Cesàro, les relation ci-dessus permettent d'obtenir un résultat analogue : si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{m}}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et $f(x) \to \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On a $f(t) - \ell \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, donc comme la fonction $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable en $+\infty$, on obtient

$$\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_0^x \mathrm{d}t\right), \quad \text{donc} \quad x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x\ell = \mathrm{o}(x).$$

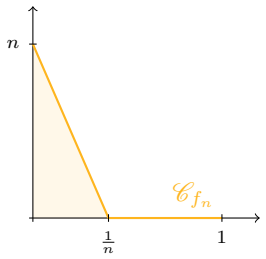
On obtient le résultat en divisant par x.

VI Théorème de convergence dominée

Dans cette partie, nous nous intéressons au passage à la limite sous une intégrale. Nous avons déjà rencontré un résultat dans le cas d'une intégrale sur un segment s'il y a convergence uniforme. Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-dessous concerne une intégrale sur un intervalle quelconque, et ne nécessite pas de convergence uniforme.

La convergence simple d'une suite de fonction f_n vers une fonction f sur un intervalle I ne suffit pas à conclure que $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction affine par morceaux $f_n : x \mapsto \max(n(1-nx), 0)$.



Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$, mais (f_n) converge simplement vers la fonction nulle f sur $]0,1]$, donc $\int_0^1 f \neq \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$.

Le théorème de convergence dominée assure que si les fonctions $|f_n|$ sont majorées par une fonction intégrable sur I indépendante de n, alors on peut passer à la limite sous l'intégrale. On dit qu'il y a domination.

La preuve du théorème s'inscrit dans le contexte de l'intégration de Lebesgue (qu'on peut voir comme une généralisation de celle de Riemann), elle est hors programme en MP.

Théorème - Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$. Si

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,
- il existe $\varphi \in L^1(I)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $|f_n| \leqslant \varphi$,

alors les fonctions f_n et f sont intégrables, et $\int_I |f - f_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier,

$$\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

Exemples.

1. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

   Si on pose $f_n : x \mapsto \tan^n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

   Si φ la fonction constante égale à 1, on a $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur I. Comme φ est intégrable sur I, l'hypothèse de domination est assurée, et par le théorème de convergence dominée,

   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

   On note qu'il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) sur I dans ce cas, donc le théorème d'interversion limite intégrale vu dans le chapitre Suites et séries de fonctions ne s'applique pas.

2. Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$, où $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $f_n : x \mapsto \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$, c'est-à-dire que $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $n \geqslant x$, on a $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x}$, il y a donc convergence simple de (f_n) vers $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
- Par concavité de la fonction ln, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in [0, n[$, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \leqslant -\frac{x}{n}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}.$$

Comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de convergence dominée entraîne que

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$