9 novembre - 13 novembre

Séries entières

Intégrale sur un intervalle quelconque

- *Révisions* : programme de la semaine dernière + théorème de convergence dominée de Lebesgue (pas encore d'intégrales à paramètre).

Séries entières

- Lemme d'Abel, rayon de convergence d'une série entière.
- Convergence absolue dans le disque ouvert de convergence, divergence grossière en dehors du disque fermé.
- Règle de d'Alembert.
- Théorème de comparaison. Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy de séries entières.
- Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Convergence normale sur tout disque fermé dans le disque ouvert de convergence.
- Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.
- Théorème d'Abel radial (preuve hors-programme). La somme d'une série entière réelle est continue sur son intervalle de définition.
- Régularité, caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière de la variable réelle, dérivation terme à terme, intégration terme à terme.
- Lien entre somme d'une série entière et série de Taylor.
- Fonction développable en série entière (variable réelle ou complexe). Unicité du développement.
- Développements en série entière usuels au voisinage de 0 :
  - ◇ exp, $z \mapsto 1/(1-z)$ pour la variable complexe.
  - ◇ cos, sin, ch, sh, arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour la variable réelle.
- Techniques d'obtention de développement en série entière. DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ obtenu par équation différentielle.

Note pour les colleurs :

- Peu d'exercices vus sur le développement en série entière, à réserver pour la deuxième moitié de semaine.
- Les étudiants doivent savoir, entre autre : redémontrer le lemme d'Abel, la règle de d'Alembert, les résultats de régularité, retrouver les DSE usuels.

À venir : Topologie.